Satz (Heron)**.** *Sei $a > 0$ mit Wurzel $w = \sqrt{a}$. Bezeichne $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge aus der Heroniteration. Wenn für den Startwert w_0 die Bedingung $w_0^2 \in [a, 4a]$ erfüllt ist, so gilt auf jeden Fall*

$$|w_n - w| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} |w_0 - w|$$

Beweis. Zunächst schätzen wir den Fehler $|w_n - w|$ durch den Fehler $|w_{n-1} - w|$ ab. Genauer gilt $|w_n - w| \leq \frac{1}{2w} |w_{n-1} - w|^2$, denn

$$\begin{aligned}
|w_n - w| &= \left| \frac{w_{n-1} + w^2/w_{n-1}}{2} - w \right| \qquad \text{beachte } a = w^2 \\
&= \left| \frac{w_{n-1}^2 + w^2}{2w_{n-1}} - \frac{2w_{n-1}w}{2w_{n-1}} \right| \\
&= \left| \frac{w_{n-1}^2 + w^2 - 2w_{n-1}w}{2w_{n-1}} \right| \\
&= \left| \frac{(w_{n-1} - w)^2}{2w_{n-1}} \right| \\
&= \frac{1}{2w_{n-1}} |w_{n-1} - w|^2 \\
&\leq \frac{1}{2w} |w_{n-1} - w|^2
\end{aligned}$$

Damit die letzte Ungleichung gilt, muss $w_{n-1} \geq w$ sein. Das ist aber keine große Einschränkung, denn wenn man den Startwert $w_0 \geq w$ wählt[1], so werden alle weiteren Iterierten w_k auch $\geq w$ sein.

Beweisvariante 1. Nun gilt sicherlich auch $|w_{n-1} - w| \leq \frac{1}{2w} |w_{n-2} - w|^2$ und deswegen kann man den Ausdruck

$$|w_{n-1} - w|^2 \leq \frac{1}{(2w)^2} |w_{n-2} - w|^4$$

Also kommt man auf

$$|w_n - w| \leq \frac{1}{2w} |w_{n-1} - w|^2 \leq \frac{1}{(2w)^{1+2}} |w_{n-2} - w|^4$$

Nun gilt sicherlich auch $|w_{n-2} - w| \leq \frac{1}{2w} |w_{n-3} - w|^2$ und deswegen kann man den Ausdruck

$$|w_{n-2} - w|^4 \leq \frac{1}{(2w)^4} |w_{n-3} - w|^8$$

Also kommt man auf

$$|w_n - w| \leq \frac{1}{(2w)^{1+2}} |w_{n-2} - w|^4 \leq \frac{1}{(2w)^{1+2+4}} |w_{n-3} - w|^8$$

usw. ... also

$$|w_n - w| \leq \frac{1}{(2w)^{1+2+4+\ldots+2^{k-1}}} |w_{n-k} - w|^{2^k}$$

Für $k = n$ ist das dann

$$|w_n - w| \leq \frac{1}{(2w)^{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}} |w_0 - w|^{2^n} = \frac{1}{(2w)^{2^n - 1}} |w_0 - w|^{2^n}$$

[1] Man wähle einfach w_0 so, dass $w_0^2 \geq a$ ist. a ist ja im Gegensatz zu w_0 bekannt.

Wobei man beachte[2], dass $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$. Ferner ist

$$\frac{1}{(2w)^{2^n-1}}|w_0-w|^{2^n}=\frac{1}{2^{2^n-1}}\left|\frac{w_0-w}{w}\right|^{2^n-1}|w_0-w|\le\frac{1}{2^{2^n-1}}|w_0-w|$$

Damit die letzte Ungleichung gilt, muss

$$\left|\frac{w_0-w}{w}\right|=\left|\frac{w_0}{w}-1\right|\le 1$$

sein, d.h. $0\le w_0/w\le 2 \iff 0\le w_0^2/a\le 4 \iff 0\le w_0^2\le 4a$, was wir ja vorausgesetzt haben.

Beweisvariante 2 (vollständige Induktion) Induktionsanfang: Für $n=0$ gilt die Ungleichung offensichtlich. Induktionsschritt: Es ist

$$|w_n-w|\le\frac{1}{2w}|w_{n-1}-w|^2$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}
|w_{n-1}-w| &\le \frac{1}{2w}\left(\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}|w_0-w|\right)^2\\
&= \frac{1}{2w\cdot 2^{2^{n-1}-1}\cdot 2^{2^{n-1}-1}}|w_0-w|^2\\
&= \frac{1}{2^{2(2^{n-1}-1)+1}}\left|\frac{w_0-w}{w}\right||w_0-w|\\
&\le \frac{1}{2^{2^n-1}}|w_0-w|
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $w_0^2\le 4a=4w^2$. □

[2]Multipliziere die lange Summe einfach mit $1=(2-1)$.